[145]

C. R. Acad. Sci. Paris, t. 321, Série I, p. 1305-1308, 1995

Équations aux dérivées partielles/*Partial Differential Equations*

Retour sur les phénomènes d'explosion pour $u_t - \Delta u = g(u)$

Haïm BREZIS, Thierry CAZENAVE, Yvan MARTEL et Arthur RAMIANDRISOA

Résumé – On s'intéresse aux relations entre l'existence de solutions classiques globales de l'équation d'évolution

$$(1)\qquad \begin{cases} u_t - \Delta u = g(u) & \text{sur } (0,\infty)\times\Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \\ u(0) = u_0 & \text{sur } \Omega, \end{cases}$$

et l'existence de solutions faibles de l'équation

$$(2)\qquad \begin{cases} -\Delta u = g(u) & \text{sur } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

$\Omega \subset \mathbf{R}^N$ est un domaine borné régulier et $g : [0,\infty) \to [0,\infty)$ est une fonction de classe C^1, convexe et croissante. On montre que s'il existe une solution faible de (2), alors il existe une solution globale classique de (1). Inversement, s'il existe une solution globale classique de (1) et si $\int^\infty ds/g(s) < \infty$, alors il existe une solution faible de (2).

A further look at blow-up phenomena for $u_t - \Delta u = g(u)$

Abstract – *We are concerned with the relations between the existence of global, classical solutions of the evolution equation* (1) *and the existence of weak solutions of the stationary problem* (2). $\Omega \subset \mathbf{R}^N$ *is a smooth, bounded domain and* $g : [0,\infty) \to [0,\infty)$ *is a* C^1 *convex, nondecreasing function. We show that if there exists a weak solution of* (2), *then there exists a global, classical solution of* (1). *Conversely, if there exists a global, classical solution of* (1) *and if* $\int^\infty ds/g(s) < \infty$, *then there exists a weak solution of* (2).

INTRODUCTION. – On s'intéresse aux relations entre l'existence de solutions classiques globales de l'équation d'évolution

$$(1)\qquad \begin{cases} u_t - \Delta u = g(u) & \text{sur } (0,\infty)\times\Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \\ u(0) = u_0 & \text{sur } \Omega, \end{cases}$$

et l'existence de solutions faibles de l'équation

$$(2)\qquad \begin{cases} -\Delta u = g(u) & \text{sur } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

$\Omega \subset \mathbf{R}^N$ est un domaine borné régulier et $g : [0,\infty) \to [0,\infty)$ est une fonction de classe C^1, convexe et croissante. Pour certains résultats, nous supposerons en outre qu'il existe $u_0 \geqq 0$ tel que $g(x_0) > 0$ et

$$(3)\qquad \int^\infty \frac{ds}{g(s)} < \infty.$$

Note présentée par Haïm BREZIS.

0764-4442/95/03211305 $ 2.00 © Académie des Sciences

Les solutions u de (1) et (2) sont toujours supposées positives. La donnée initiale u_0 est toujours dans $L^\infty(\Omega)$, positive, de sorte qu'une solution classique de (1) existe sur un intervalle maximal $(0, T_m)$.

La notion de solution faible de (2) est la suivante.

DÉFINITION 1. – Une *solution faible* de (2) est une fonction $u \in L^1(\Omega)$, $u \geqq 0$ telle que

$$g(u)\,\delta \in L^1(\Omega), \tag{4}$$

où δ est la fonction distance au bord de Ω,

$$\delta(x) = \operatorname{dist}(x, \partial\Omega), \tag{5}$$

et

$$-\int_\Omega u\,\Delta\zeta = \lambda \int_\Omega g(u)\,\zeta, \tag{6}$$

pour tout $\zeta \in C^2(\overline{\Omega})$ tel que $\zeta = 0$ sur $\partial\Omega$. (La seconde intégrale a un sens, puisque $|\zeta(x)| \leqq C\,\delta(x)$ tout $x \in \Omega$.)

Notre premier résultat est le suivant.

THÉORÈME 1. – *Supposons* (3). *S'il existe une solution globale, classique de* (1) *pour un certain* $u_0 \in L^\infty(\Omega)$, $u_0 \geqq 0$, *alors il existe une solution faible de* (2).

Remarque 1. – Le théorème 1 est assez surprenant, puisque nous n'imposons aucune borne (lorsque $t \to \infty$) sur la solution globale u.

Remarque 2. – L'existence d'une solution globale de (1) n'implique pas en général l'existence d'une solution classique de (2). Dans de nombreux exemples, l'existence d'une solution faible de (2) implique l'existence d'une solution classique de (2). On rencontre effectivement des situations dans lesquelles il n'existe pas de solution classique du problème stationnaire et cependant il existe une solution globale classique de l'équation d'évolution. *Voir* le théorème 2 et la remarque 5.

Le théorème 1 a un corollaire immédiat :

COROLLAIRE 1. – *Supposons* (3). *S'il n'existe aucune solution faible de* (2), *alors pour toute donnée* $u_0 \in L^\infty(\Omega)$, $u_0 \geqq 0$, *la solution de* (1) *explose en temps fini.*

Remarque 3. – On dispose de résultats fins concernant l'existence ou la non-existence de solutions faibles de (2). Voir les propriétés *a*) et *d*) ci-dessous et le corollaire 2.

Le théorème 1 admet une réciproque, sans l'hypothèse (3).

THÉORÈME 2. – *S'il existe une solution faible* w *de* (2), *alors pour tout* $u_0 \in L^\infty(\Omega)$ *tel que* $0 \leqq u_0 \leqq w$, *la solution* u *de* (1) *est globale.*

Remarque 4. – Si w est une solution classique de (2), il résulte immédiatement du principe du maximum que $u \leqq w$ et donc u est une solution globale. Cependant, si $w \notin L^\infty(\Omega)$, alors la conclusion n'est pas immédiate. En effet, supposons que u explose au temps fini T_m. On a naturellement $u(t, x) \leqq w(x)$ sur $(0, T_m) \times \Omega$, mais cette estimation n'empêche pas par elle-même $\|u(t)\|_{L^\infty}$ d'exploser en temps fini. Il est bien connu que $u(t, x)$ peut converger vers un profil limite $u(T_m, x)$, qui peut être fini partout sauf en un point (*voir* Weissler [15]).

Un argument essentiel dans la démonstration du théorème 2 consiste à montrer que certaines « perturbations » de (2) possèdent des solutions classiques dès que (2) possède une solution faible. Voici un résultat typique dans ce sens :

THÉORÈME 3. – *S'il existe une solution faible w de* (2), *alors il existe une solution classique w_ε de*

$$\begin{cases} -\Delta w_\varepsilon = (1-\varepsilon)\, g(w_\varepsilon) & \text{sur } \Omega, \\ w_\varepsilon = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{7}$$

pour tout $\varepsilon \in (0, 1)$.

Le théorème 3 permet d'affiner certains résultats bien connus concernant le problème

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda g(u) & \text{sur } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{8}$$

Ici, nous supposons en outre que

$$g(0) > 0 \qquad \text{et} \qquad g \not\equiv g(0). \tag{9}$$

Rappelons qu'il existe $0 < \lambda^* < \infty$ tel que :

a) Pour tout $0 < \lambda^* < \infty$ l'équation (8) possède une solution classique, positive, minimale $u(\lambda)$, qui est l'unique solution stable de (8) au sens où

$$\lambda_1 (-\Delta - \lambda g'(u(\lambda))) > 0.$$

(Il peut exister, pour certaines valeurs de $\lambda \in (0, \lambda^*)$, une ou plusieurs autres solutions, qui sont toutes instables.)

b) L'application $\lambda \mapsto u(\lambda)$ est croissante.

c) Pour $\lambda > \lambda^*$, il n'y a aucune solution classique de (2).

d) Si $\lambda = \lambda^*$, et si

$$\frac{g(u)}{u} \underset{u\to\infty}{\longrightarrow} \infty, \tag{10}$$

alors il existe une solution faible $u^* = \lim_{\lambda \uparrow \lambda^*} u(\lambda)$ de (8).

Ces résultats sont établis dans I. M. Gel'fand [8], H. B. Keller et D. S. Cohen [10], H. B. Keller et J. Keener [11], M. G. Crandall et P. H. Rabinowitz [4], H. Brezis et L. Nirenberg [3].

La propriété *d*) n'est pas tout-à-fait standard, *voir* [2].

Remarque 5. – La solution u^* est parfois une solution classique. Par exemple si $g(u) = e^u$ et $N \leqq 9$ ou si $g(u) = (1+u)^p$ et $N \leqq 10$ (*voir* F. Mignot et J.-P. Puel [14]). Cependant, il existe des cas importants où il n'y a pas de solution classique à $\lambda = \lambda^*$. Par exemple lorsque Ω est la boule unité de $\mathbf{R}^N$ avec $N \geqq 10$ et $g(u) = e^u$; dans ce cas, $\lambda^* = 2(N-2)$ et $u^*(x) = \log(1/|x|^2)$ (*voir* D. D. Joseph and T. S. Lundgren [9]).

La principale nouveauté est :

COROLLAIRE 2. – *Supposons* (9). *Si $\lambda > \lambda^*$, alors il n'existe aucune solution faible de* (8).

C'est une conséquence immédiate du théorème 3 appliqué à la fonction λg, et de la caractérisation de λ^*.

Remarque 6. – Gallouët, Mignot et Puel [7] ont obtenu un résultat semblable au corollaire 2 dans le cas $g(u) = e^u$ (et pour une notion plus forte de solution faible).

En combinant les théorèmes 1, 2 et 3, on obtient le résultat suivant.

COROLLAIRE 3. – *Supposons* (3) *et* (9), *et soit* u *la solution (classique) de*

$$(11)\qquad \begin{cases} u_t - \Delta u = \lambda g(u) & \text{sur } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \\ u(0) = 0 & \text{sur } \Omega. \end{cases}$$

Si $\lambda \leqq \lambda^*$, *alors* u *est globale. Si* $\lambda > \lambda^*$, *alors* u *explose en temps fini.*

Remarque 7. – Notons qu'on trouve le même paramètre critique λ^* pour le problème stationnaire et pour le problème d'évolution.

Depuis les premiers travaux de H. Fujita ([5], [6]) concernant le cas $g(u) = e^u$, de nombreux auteurs ont étudié le problème de l'explosion en temps fini ou de l'existence globale des solutions de (11). A. Lacey [12] a montré que la solution de (11) explose en temps fini pour $\lambda > \lambda^*$ sous une hypothèse supplémentaire : $u^* \in L^\infty(\Omega)$ ou Ω est une boule. H. Bellout [1] a montré le même résultat, sous l'hypothèse que $(g/g')'' \leqq 0$. Par ailleurs, A. Lacey et D. Tzanetis [13] ont montré que pour $\lambda = \lambda^*$ la solution de (11) est globale lorsque Ω est une boule, $u_0 \leqq u^*$, $u_0 \in L^\infty(\Omega)$ et u_0 est radiale (ainsi que pour des domaines plus généraux, mais sous des hypothèses restrictives).

Pour les démonstrations des résultats décrits dans cette Note, nous renvoyons à [2].

Note remise et acceptée le 9 juillet 1995.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] H. BELLOUT, A criterion for blow-up of solutions to semi-linear heat equations, *SIAM J. Math. Anal.*, 18, 1987, p. 722-737.

[2] H. BREZIS, T. CAZENAVE, Y. MARTEL et A. RAMIANDRISOA, Blow up for $u_t - \Delta u = g(u)$ revisited (à paraître).

[3] H. BREZIS et L. NIRENBERG, *Nonlinear Functional Analysis and Applications*, Part 1 (à paraître).

[4] M. G. CRANDALL et P. H. RABINOWITZ, Some continuation and variational methods for positive solutions of nonlinear elliptic eigenvalue problems, *Arch. Rational Mech. Anal.*, 58, 1975, p. 207-218.

[5] H. FUJITA, On the nonlinear equations $\Delta u + e^u = 0$ and $\partial u/\partial t = \Delta u + e^u$, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 75, 1969, p. 132-135.

[6] H. FUJITA, On the asymptotic stability of solutions of the equation $v_t = \Delta v + e^v$, in *Proc. Internat. Conf. on Functional Analysis and related Topics (Tokyo,* 1970), Univ. of Tokyo Press, Tokyo, 1970, p. 252-259.

[7] T. GALLOUËT, F. MIGNOT et J.-P. PUEL, Quelques résultats sur le problème $-\Delta u = \lambda e^u$, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 307, série I, 1988, p. 289-292

[8] I. M. GEL'FAND, Some problems in the theory of quasilinear equations, *Amer. Math. Soc. Transl.*, 29, 1963, p. 295-381.

[9] D. D. JOSEPH et T. S. LUNDGREN, Quasilinear Dirichlet problems driven by positive sources, *Arch. Rational Mech. Anal.*, 49, 1973, p. 241-269.

[10] H. B. KELLER et D. S. COHEN, Some positone problems suggested by nonlinear heat generation, *J. Math. Mech.*, 16, 1967, p. 1361-1376.

[11] H. B. KELLER et J. KEENER, Positive solutions of convex nonlinear eigenvalue problems, *J. Differ. Eq.*, 16, 1974, p. 103-125.

[12] A. LACEY, Mathematical analysis of thermal runaway for spatially inhomogeneous reactions, *SIAM J. Appl. Anal.*, 43, 1983, p. 1350-1366.

[13] A. LACEY et D. TZANETIS, Global existence and convergence to a singular steady state for a semilinear heat equation, *Proc. Royal Soc. Edinburgh Sect. A*, 105, 1987, p. 289-305.

[14] F. MIGNOT et J.-P. PUEL, Sur une classe de problèmes non linéaires avec non linéarité positive, croissante, convexe, *Comm. PDE*, 5, 1980, p. 791-836.

[15] F. B. WEISSLER, Single point blow-up for a semilinear initial value problem, *J. Differ. Eq.*, 55, 1984, p. 204-224.

Analyse Numérique, URA CNRS 189, Université Pierre-et-Marie-Curie, 4, place Jussieu, 75252 Paris Cedex 05, France.