Die Cohen-Macaulay-Eigenschaft von Invariantenringen

Nach M. Hochster und C. Huneke

Friedrich Knop
Mathematisches Institut der Universität Basel, Rheinsprung 21, CH-4051 Basel

Diese Note beansprucht keinerlei Originalität. Alle Argumente stammen von M. Hochster und C. Huneke [HH]. Das Ziel ist es, den Satz von Hochster-Roberts möglichst elementar zu beweisen.

Satz. (Hochster-Roberts) *Sei G eine reduktive Gruppe und V eine G-Darstellung, beide definiert über einem Körper k der Charakteristik null. Dann ist $k[V]^G$ ein Cohen-Macaulay-Ring.*

Beweis: Sei $R := k[V]$ und $f_0, \ldots, f_s \in S := R^G$ ein homogenes System von Parametern. Wir müssen zeigen, daß die f_i eine reguläre Folge bilden. Da die Reihenfolge der f_i willkürlich ist, genügt es für $1 \le r \le s$ zu zeigen:

$$\text{Wenn } g \in S \text{ und } gf_0 \in Sf_1 + \ldots + Sf_r, \text{ dann ist } g \in Sf_1 + \ldots + Sf_r.$$

Wegen der linearen Reduktivität von G müssen wir sogar nur

$$g \in Rf_1 + \ldots + Rf_r$$

zeigen. Weiterhin können wir annehmen, daß auch g homogen ist.

Setze $B := k[f_0, \ldots, f_s]$, und seien $r_1, \ldots, r_m$ Erzeuger von S als B-Modul. Weiter seien $x_1, \ldots, x_n$ lineare Koordinaten von V. Für einen endlich erzeugten Teilring $A_0 \subseteq k$ definieren wir folgende Unterringe von R:

$$R_0 := A_0[x_1, \ldots, x_n],\ B_0 := A_0[f_0, \ldots, f_s] \text{ und } S_0 := B_0[r_1, \ldots, r_m].$$

Wir wählen den Ring A_0 so groß, daß folgende Bedingungen erfüllt sind:

— $S_0 \subseteq R_0$.
— $S_0 = B_0 r_1 + \ldots + B_0 r_m$
— $g \in S_0$
— $gf_0 \in S_0 f_1 + \ldots + S_0 f_r$

Annahme: $g \notin Rf_1 + \ldots + Rf_r$.

Da alle vorkommenden Polynome homogen sind, ist dies äquivalent zur Unlösbarkeit eines endlichen, inhomogenen linearen Gleichungssystems mit Koeffizienten in A_0 und damit zum Nichtverschwinden gewisser Determinanten. Sei $d \in A_0$ eine davon, und wähle ein maximales Ideal $\mathfrak{m} \subseteq A_0$ mit $d \notin \mathfrak{m}$. Nun setzen wir

$$\overline{A} := A_0/\mathfrak{m},\ \overline{R} := R_0/\mathfrak{m}R_0,\ \overline{B} := B_0/\mathfrak{m}B_0 \text{ und } \overline{S} = S_0/\mathfrak{m}S_0.$$

Weiter seien $\bar{x}_i \in \overline{R}$, $\bar{f}_i \in \overline{B}$ und $\bar{g} \in \overline{S}$ die Bilder von x_i, f_i und g. Dann sind $\overline{R} = \overline{A}[\bar{x}_i]$ und $\overline{B} = \overline{A}[\bar{f}_i]$ Polynomringe, und $\overline{A}$ ist ein endlicher Körper. Sei p seine Charakteristik. Nach Konstruktion gilt

$$\bar{g} \notin \overline{R}\bar{f}_1 + \ldots + \overline{R}\bar{f}_r.$$

Das Ideal $\mathfrak{m}$ soll noch einer zweiten Bedingung genügen: Nach [M] (22.A) Lemma 1 gibt es ein $b \in B_0$, so daß die Lokalisierung $R_0[b^{-1}]$ ein freier $B_0[b^{-1}]$-Modul ist. Wähle nun $\mathfrak{m}$ mit $b \notin \mathfrak{m}B_0$, und sei $\bar{b}$ das Bild von b in $\overline{B}$. Dann gilt $\overline{B} \hookrightarrow \overline{B}[\bar{b}^{-1}] \hookrightarrow \overline{R}[\bar{b}^{-1}]$, und damit ist $\overline{B} \to \overline{R}$ injektiv.

Als $\overline{B}$-Modul ist $\overline{S}$ endlich erzeugt. Also können wir einen freien $\overline{B}$-Untermodul F maximalen Ranges finden. Weil dann $\overline{S}/F$ ein Torsionsmodul ist, gibt es ein $0 \neq c \in \overline{B}$ mit $c\overline{S} \subseteq F$. Weiterhin gibt es $\bar{g}_i \in \overline{S}$ mit

$$\bar{g}\bar{f}_0 = \sum_{i=1}^{r} \bar{g}_i \bar{f}_i$$

Potenzieren dieser Gleichung mit $q = p^N$ und Multiplizieren mit c liefert

$$\underbrace{(c\bar{g}^q)}_{\in F} \bar{f}_0^q = \sum_{i=1}^{r} \underbrace{(c\bar{g}_i^q)}_{\in F} \bar{f}_i^q$$

Die Folge $\bar{f}_0^q, \ldots, \bar{f}_r^q$ ist eine reguläre Sequenz für den freien $\overline{B}$-Modul F. Insbesondere ist $c\bar{g}^q$ gleich null modulo $\bar{f}_1^q, \ldots, \bar{f}_r^q$, d.h. es gibt $h_i^{(q)} \in F$ mit

$$c\bar{g}^q = \sum_{i=1}^{r} h_i^{(q)} \bar{f}_i^q$$

Wir betrachten dies jetzt als Gleichung in $\overline{R}$. Für einen Multiindex $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ sei $|\alpha| = \max_i \alpha_i$. Die Monome $\bar{x}^\alpha := \bar{x}_1^{\alpha_1} \ldots \bar{x}_n^{\alpha_n}$ mit $|\alpha| < q$ bilden eine Basis von $\overline{R}$ als $\overline{A}[\bar{x}_i^q]$-Modul. Entscheidend ist nun, daß c nicht von q abhängt. Wähle q so groß, daß $c = \sum_{|\alpha|<q} c_\alpha \bar{x}^\alpha$ mit $c_\alpha \in \overline{A}$ ist. Drücken wir beide Seiten der obigen Gleichung in dieser Basis aus, so erhalten wir

$$\sum_{|\alpha|<q} (c_\alpha \bar{g}^q) \bar{x}^\alpha = \sum_{|\alpha|<q} k_\alpha^q \bar{x}^\alpha$$

mit Elementen $k_\alpha \in \overline{R}\bar{f}_1 + \ldots + \overline{R}\bar{f}_r$. Für einen Multiindex α mit $c_\alpha \neq 0$ gilt dann

$$\bar{g} = c_\alpha^{-\frac{1}{q}} k_\alpha \in \overline{R}\bar{f}_1 + \ldots + \overline{R}\bar{f}_r.$$

Widerspruch! $\square$

Literatur:

[HH] Hochster, M.; Huneke, C.: Tight closure, invariant theory, and the Briançon-Skoda theorem. *J. Amer. Math. Soc.* **3** (1990), 31–116

[HR] Hochster, M.; Roberts, J.: Rings of invariants of reductive groups acting on regular rings are Cohen-Macaulay. *Adv. Math.* **13** (1974), 115–175

[M] Matsumura, H.: Commutative Algebra, 2nd ed.. Reading: Benjamin 1980