

Der Zentralisator einer Liealgebra in einer einhüllenden Algebra

Friedrich Knop
Max-Planck-Institut für Mathematik
Gottfried-Claren-Straße 26
D-5300 Bonn 3

Abstract: Let \mathfrak{g} be semisimple Lie algebra und \mathfrak{h} a reductive subalgebra. In this paper we are concerned with the relationship of the centralizer $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})^{\mathfrak{h}}$ of \mathfrak{h} in the enveloping algebra and the centers of $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ and $\mathfrak{U}(\mathfrak{h})$. Let for example \mathfrak{g} be a real semisimple algebra and \mathfrak{h} be a maximal compact subalgebra. Then $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})^{\mathfrak{h}}$ is canonically isomorphic to $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}} \otimes \mathfrak{U}(\mathfrak{h})^{\mathfrak{h}}$ if and only if \mathfrak{g} has only factors isomorphic to $\mathfrak{su}(n, 1)$ or $\mathfrak{so}(n, 1)$. In any case $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})^{\mathfrak{h}}$ is flat over the algebra generated by $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$ and $\mathfrak{U}(\mathfrak{h})^{\mathfrak{h}}$.

1. Einleitung

Sei \mathfrak{g} eine halbeinfache Liealgebra und \mathfrak{h} eine reductive Unteralgebra. Der Zentralisator $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})^{\mathfrak{h}}$ von \mathfrak{h} in der universell einhüllenden Algebra von \mathfrak{g} enthält dann sowohl das Zentrum von $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ als auch das von $\mathfrak{U}(\mathfrak{h})$. In [5] hat K. Johnson bewiesen, daß im Falle $\mathfrak{g} = \mathfrak{su}(n, 1)$ und $\mathfrak{h} = \mathfrak{u}(n)$ der Zentralisator von den beiden Zentren erzeugt wird. Wir zeigen in dieser Arbeit, daß dies auch $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(n, 1)$ und $\mathfrak{h} = \mathfrak{so}(n)$ zutrifft und daß dies im Prinzip die einzigen nichttrivialen Fälle sind, für die dies gilt (Satz 2.3). Weiterhin zeigen wir, daß der Zentralisator immer ein flacher Modul über dem Erzeugnis der beiden Zentren ist (Satz 2.2). Die Beweisidee besteht darin, zum zugehörigen graduierten Fall überzugehen. Die in Rede stehenden Algebren sind dann durch eine gewisse Momentabbildung miteinander verknüpft, die ich schon in [6] untersucht habe.

2. Ergebnisse

Alles sei im folgenden über einem Körper k der Charakteristik null definiert. Für eine Liealgebra \mathfrak{g} sei $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ ihre universell einhüllende Algebra. Sie besitzt eine kanonische Filtrierung $\mathfrak{U}_n(\mathfrak{g})$ und die zugehörige graduierte Algebra ist die symmetrische Algebra $S(\mathfrak{g})$. Für $x \in \mathfrak{U}_n(\mathfrak{g}) - \mathfrak{U}_{n-1}(\mathfrak{g})$ sei \bar{x} das Bild von x in $S(\mathfrak{g})$. Der Kommutator auf $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ induziert auf $S(\mathfrak{g})$ ein Poissonprodukt: Für $\bar{x} \in S^m(\mathfrak{g})$ und $\bar{y} \in S^n(\mathfrak{g})$ ist $\{\bar{x}, \bar{y}\} := \overline{xy - yx} \in S^{m+n-1}(\mathfrak{g})$. Das Zentrum $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$ der einhüllenden Algebra bezeichnen wir mit $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$. Entsprechend sei $Z(\mathfrak{g}) := S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$. Wenn \mathfrak{g} halbeinfach ist, sind beide Algebren Polynomringe mit $\text{rg } \mathfrak{g}$ Erzeugenden.

Sei ab jetzt \mathfrak{g} halbeinfach und $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ eine reduktive Untereralgebra. Wir interessieren uns für den Zentralisator $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})^{\mathfrak{h}}$ von \mathfrak{h} in $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$. Es gibt einen kanonischen Homomorphismus

$$\mu : \mathfrak{Z}(\mathfrak{g}) \otimes_k \mathfrak{Z}(\mathfrak{h}) \longrightarrow \mathfrak{U}(\mathfrak{g})^{\mathfrak{h}}.$$

Sein Bild sei \mathfrak{Z}_0 . Entsprechend haben wir einen Homomorphismus von Poissonalgebren

$$\mu' : Z(\mathfrak{g}) \otimes_k Z(\mathfrak{h}) \longrightarrow S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{h}}.$$

mit Bild Z_0 .

Satz 2.1. *Sei \mathfrak{k} das größte Ideal von \mathfrak{g} , das in \mathfrak{h} enthalten ist. Dann ist*

$$\mathfrak{Z}_0 = \mathfrak{Z}(\mathfrak{g}) \otimes_{\mathfrak{Z}(\mathfrak{k})} \mathfrak{Z}(\mathfrak{h}), \quad Z_0 = Z(\mathfrak{g}) \otimes_{Z(\mathfrak{k})} Z(\mathfrak{h}).$$

Insbesondere ist μ (bzw. μ') genau dann injektiv, wenn \mathfrak{h} kein echtes Ideal von \mathfrak{g} enthält. Weiterhin sind \mathfrak{Z}_0 und Z_0 Polynomringe.

Satz 2.2. *$\mathfrak{U}(\mathfrak{g})^{\mathfrak{h}}$ (bzw. $S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{h}}$) ist ein flacher \mathfrak{Z}_0 - (bzw. Z_0 -)Modul.*

Satz 2.3. *Es sind äquivalent:*

1. μ ist surjektiv.
- 1'. μ' ist surjektiv.
2. \mathfrak{h} ist algebraisch, und $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})^{\mathfrak{h}}$ ist kommutativ.
- 2'. \mathfrak{h} ist algebraisch, und das Poissonprodukt auf $S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{h}}$ verschwindet.
3. $\mathfrak{g} = \bigoplus_{i=1}^s \mathfrak{g}_i$, $\mathfrak{h} = \bigoplus_{i=1}^s \mathfrak{h}_i$ mit $\mathfrak{h}_i \subseteq \mathfrak{g}_i$, wobei über dem algebraischen Abschluß von k für jedes i einer der folgenden Fälle zutrifft:
 - $\mathfrak{h}_i = \mathfrak{g}_i$ ist eine einfache Liealgebra,
 - $\mathfrak{g}_i = \mathfrak{sl}_n$, $\mathfrak{h}_i = \mathfrak{gl}_{n-1}$ mit $n \geq 2$,
 - $\mathfrak{g}_i = \mathfrak{so}_n$, $\mathfrak{h}_i = \mathfrak{so}_{n-1}$ mit $n \geq 4$.

Wenn diese Bedingungen erfüllt sind, ist $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ (bzw. $S(\mathfrak{g})$) ein freier $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})^{\mathfrak{h}}$ - (bzw. $S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{h}}$ -) Modul.

3. Beweise

Zunächst sei bemerkt, daß alle Behauptungen genau dann richtig sind, wenn sie über dem algebraischen Abschluß von k stimmen. Wir nehmen daher ab jetzt an, daß k algebraisch abgeschlossen ist.

Sei G die einfach zusammenhängende algebraische Gruppe mit Liealgebra \mathfrak{g} . Wenn es eine abgeschlossene Untergruppe $H \subseteq G$ mit $\mathfrak{h} = \text{Lie } H$ gibt, so heißt \mathfrak{h} algebraisch. In jedem Fall gibt es eine kleinste algebraische Unteralgebra $\bar{\mathfrak{h}} \supseteq \mathfrak{h}$, die algebraische Hülle. Sie ist ebenfalls reduktiv, \mathfrak{h} ist ein Ideal, und der Quotient ist abelsch. Es gilt $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})^{\mathfrak{h}} = \mathfrak{U}(\mathfrak{g})^{\bar{\mathfrak{h}}}$.

Wenn \mathfrak{h} algebraisch ist, setzen wir $X := (G \times H)/H$, wobei H diagonal eingebettet ist. Mit anderen Worten ist $X = G$ und $G \times H$ operiert durch $s \mapsto gsh^{-1}$. Weiter sei $\pi : T_X^* \rightarrow X$ das Kotangentenbündel. Es gilt $T_X^* = G \times \mathfrak{g}^*$, π ist die Projektion auf den ersten Faktor, G operiert durch Linksmultiplikation auf dem ersten Faktor, und H operiert durch Rechtsmultiplikation auf dem ersten und durch Konjugation auf dem zweiten Faktor. Auf T_X^* ist die Momentabbildung definiert:

$$\Phi : T_X^* \longrightarrow (\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{h})^* : \alpha \mapsto (\xi \in \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{h} \mapsto \alpha(\xi_{\pi(\alpha)}))$$

Für die Funktionalalgebren liefert dies

$$S(\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{h}) \longrightarrow k[T_X^*] = k[G \times \mathfrak{g}^*] = k[G] \otimes_k S(\mathfrak{g})$$

Der Übergang zu $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{h}$ -Invarianten liefert genau

$$\mu' : Z(\mathfrak{g}) \otimes_k Z(\mathfrak{h}) = S(\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{h})^{\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{h}} \longrightarrow (k[G] \otimes_k S(\mathfrak{g}))^{\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{h}} = S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{h}}$$

Diesen Homomorphismus habe ich in [6] eingehend untersucht.

Beweis von Satz 2.1: Sei $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{g}_0$ und $\mathfrak{h} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{h}_0$. Dann ist $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g}) \otimes_{\mathfrak{Z}(\mathfrak{k})} \mathfrak{Z}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{Z}(\mathfrak{k}) \otimes_k \mathfrak{Z}(\mathfrak{g}_0) \otimes_k \mathfrak{Z}(\mathfrak{h}_0)$, sowie $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})^{\mathfrak{h}} = \mathfrak{Z}(\mathfrak{k}) \otimes_k \mathfrak{U}(\mathfrak{g}_0)^{\mathfrak{h}_0}$. Entsprechendes gilt für den graduierten Fall. Damit genügt es zu zeigen: $\mathfrak{k} = 0 \Rightarrow \mu, \mu'$ sind injektiv. Da μ' aus μ durch Übergang zur assoziierten graduierten Algebra entsteht, genügt es zu zeigen, daß μ' injektiv ist. Weiterhin können wir annehmen, daß \mathfrak{h} algebraisch ist.

Sei $T \subseteq G$ ein maximaler Torus. Da G lokal effektiv auf G/H operiert, ist die generische Standgruppe von T auf G/H endlich. Anders ausgedrückt gibt es einen maximalen Torus T_0 , so daß $T_0 \cap H$ endlich ist. Wähle ein $\xi \in \mathfrak{g}^*$ mit $G_\xi = T_0$. Dann ist H_ξ und damit die generische Standgruppe von $G \times H$ auf T_X^* endlich. Aus [6] Korollar 8.2 und Satz 5.4 folgt, daß die Momentabbildung dominant ist. Insbesondere ist μ' injektiv. \square

Beweis von Satz 2.2: Sei $\bar{\mathfrak{h}} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{h}$ die algebraische Hülle von \mathfrak{h} . Dann ist $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g}) \otimes_{\mathfrak{Z}(\mathfrak{h})} \mathfrak{Z}(\bar{\mathfrak{h}}) = \mathfrak{Z}_0 \otimes_k \mathfrak{U}(\mathfrak{a})$ flach über \mathfrak{Z}_0 . Entsprechendes gilt für den graduierten Fall. Es genügt also, den Satz für algebraisches \mathfrak{h} zu beweisen. Ebenfalls genügt es, die Behauptung für den graduierten Fall zu beweisen.

Wir haben dann folgendes kommutative Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} T_X^* & \xrightarrow{\alpha} & \text{Spec } S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{h}} \\ & \beta \searrow & \downarrow \gamma \\ & & \text{Spec } Z_0 \end{array}$$

Nach [6] Satz 6.6c ist β äquidimensional. Da α surjektiv ist, ist auch γ äquidimensional. Nach [4] oder [1] ist $S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{h}}$ ein Cohen-Macaulay-Ring. Mit [3] §15.4.2 folgt die Flachheit von $S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{h}}$ über Z_0 . \square

Beweis von Satz 2.3: $1' \Rightarrow 1$: trivial.

$1 \Rightarrow 2$: $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})^{\mathfrak{h}} = \mathfrak{Z}_0$ ist kommutativ. Sei $\bar{\mathfrak{h}} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{h}$ die algebraische Hülle von \mathfrak{h} . Wegen $\mathfrak{Z}_0 = \mathfrak{U}(\mathfrak{g})^{\mathfrak{h}} = \mathfrak{U}(\mathfrak{g})^{\bar{\mathfrak{h}}} \supseteq \mathfrak{Z}_0 \otimes_k \mathfrak{U}(\mathfrak{a})$ ist $\mathfrak{a} = 0$, und \mathfrak{h} ist algebraisch.

$2 \Rightarrow 2'$: trivial.

$2' \Rightarrow 3$: Sei $B \subseteq G \times H$ eine Boreluntergruppe. Der Transzendenzgrad des Invariantenkörpers $k(X)^B$ heißt Kompliziertheit von X . Varietäten der Kompliziertheit null heißen sphärisch. Wenn X nicht sphärisch ist, folgt aus [6] Satz 7.1, daß es eine $G \times H$ -invariante rationale Funktion f auf T_X^* gibt, die algebraisch unabhängig von $S(\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{h})$ ist. Nach [6] Satz 7.6 folgt, daß f nicht mit allen $G \times H$ -invarianten rationalen Funktionen auf T_X^* Poisson-kommutieren kann. Die Einschränkungabbildung von $k(T_X^*)^{G \times H}$ auf $\mathfrak{g}^* = \{e\} \times \mathfrak{g}^* \subseteq G \times \mathfrak{g}^* = T_X^*$ liefert einen Poisson-Isomorphismus mit $k(\mathfrak{g}^*)^{\mathfrak{h}}$. Nach [7] Corollaire 7 ist die generische Bahn von H auf \mathfrak{g}^* abgeschlossen. Insbesondere gilt $k(\mathfrak{g}^*)^{\mathfrak{h}} = \text{Quot } k[\mathfrak{g}^*]^{\mathfrak{h}} = \text{Quot } S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{h}}$, d.h. $S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{h}}$ ist nicht Poisson-kommutativ. Also ist X sphärisch. In [2] sind alle affinen, homogenen, sphärischen Varietäten klassifiziert. Aus dieser Tabelle liest man ab, daß $(G \times H)/H$ genau dann sphärisch ist, wenn $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ wie in Punkt 3 des Satzes ist.

$3 \Rightarrow 1'$: Wir können annehmen, daß $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ eines der drei Paare ist. Der erste Fall ist trivial. $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n$, $\mathfrak{h} = \mathfrak{gl}_{n-1}$: Dieser Fall wurde in [5] behandelt. Ich möchte hier einen kürzeren Beweis vorstellen: Wir identifizieren \mathfrak{g}^* und \mathfrak{g} mit Hilfe der Killingform. \mathfrak{h} ist die Menge aller Matrizen in \mathfrak{sl}_n , deren letzte Zeile und letzte Spalte bis auf das Diagonalelement aus Nullen besteht. Sei nun S die Menge aller Matrizen in \mathfrak{g} von folgender Form:

$$\begin{pmatrix} 0 & & & * & * \\ 1 & \ddots & & \vdots & \vdots \\ & \ddots & 0 & * & * \\ & & 1 & * & * \\ & & & 1 & * \end{pmatrix}$$

Wir haben einen Morphismus

$$\Phi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g} // G \times \mathfrak{h} // H := \text{Spec } S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}} \times \text{Spec } S(\mathfrak{h})^{\mathfrak{h}}$$

Die Nullfaser ist genau die Menge der nilpotenten Matrizen, die nilpotent bleiben, wenn man die letzte Zeile und Spalte fortläßt. Es gibt nur eine Matrix in S , die diese Bedingung erfüllt, nämlich die, bei der alle Sternchen gleich Null sind.

Für $t \in k^*$ sei $\lambda(t) := \text{diag}(t^{n-1}, t^{n-3}, \dots, t^{-n+3}, t^{-n+1}) \in H$. Wir lassen nun k^* folgendermaßen auf \mathfrak{g} operieren: Für $t \in k^*$ und $A \in \mathfrak{sl}_n$ sei $t \cdot A := t^2 \lambda(t) A \lambda(t)^{-1}$. Diese Operation läßt S invariant. Genauer operiert k^* linear auf S mit den Gewichten $2, 4, \dots, 2n-2, 4, 6, \dots, 2n$. Dies sind aber genau die Gewichte mit denen k^* auf $\mathfrak{g} // G \times \mathfrak{h} // H$ operiert. Mit [9] 8.1 Lemma 3 erhalten wir, daß $S \rightarrow \mathfrak{g} // G \times \mathfrak{h} // H$ ein Isomorphismus ist. Dies liefert ein Inverses zum kanonischen Morphismus $\mathfrak{g} // H \rightarrow \mathfrak{g} // G \times \mathfrak{h} // H$, und damit ist die Behauptung gezeigt.

$\mathfrak{g} = \mathfrak{so}_n$, $\mathfrak{h} = \mathfrak{so}_{n-1}$: Diesen Fall könnte man im Prinzip genauso behandeln wie den vorherigen. Wir schlagen hier eine Variante ein: Es gibt einen kanonischen Morphismus $\Phi : \mathfrak{g} // H \rightarrow \mathfrak{g} // G \times \mathfrak{h} // H$. Da X sphärisch ist, ist Φ endlich ([6] Satz 7.1). Beide Räume sind glatt und tragen eine natürliche k^* -Operation, so daß Φ äquivariant ist. Die Gewichte dieser Operationen sind dieselben ([8] Table 3a, Zeile 2 und 5). Mit [9] 8.1 Lemma 3 erhalten wir wieder, daß es sich bei Φ um einen Isomorphismus handelt, was zu beweisen war.

Zum Beweis der letzten Aussage: Nach [6] Satz 6.6 ist $S(\mathfrak{g})$ flach über $\mathfrak{Z}_0 = \mathfrak{U}(\mathfrak{g})^{\mathfrak{h}}$. Sei $S(\mathfrak{g}) = \bigoplus_{\chi} M_{\chi}$ die Zerlegung des H -Moduls $S(\mathfrak{g})$ in isotypische Komponenten. Diese sind endlich erzeugte \mathfrak{Z}_0 -Moduln und als direkte Summanden eines flachen Moduls flach, also projektiv, also frei. Der ungraduierete Fall folgt hieraus. \square

4. Literatur:

- [1] Boutot, J.-F., Singularités et quotients par les groupes réductifs. *Invent. Math.* **88** (1987), 65–68
- [2] Brion, M., Classification des espaces homogènes sphériques. *Compos. Math.* **63** (1987), 189–208
- [3] Dieudonné, J.; Grothendieck, A., Eléments de géométrie algébrique IV. *Publ. Math. IHES* **28** (1966)
- [4] Hochster, M.; Roberts, J., Rings of invariants of reductive groups acting on regular rings are Cohen-Macaulay. *Adv. in Math.* **13** (1974), 115–175

- [5] Johnson, K., The centralizer of a Lie algebra in an enveloping algebra. *J. reine angew. Math.* **395** (1989), 196–201
- [6] Knop, F., Weylgruppe und Momentabbildung. *Preprint* (1989)
- [7] Luna, D., Slices étales. *Bull. Soc. Math. France, Mem.* **33** (1973), 81–105
- [8] Schwarz, G., Representations of simple Lie groups with regular rings of invariants. *Invent. Math.* **49** (1978), 167–191
- [9] Slodowy, P., Simple Singularities and simple algebraic groups. *Lect. Notes Math.* **815** (1980)