

Relativistischer Kollaps der quantenmechanischen Wellenfunktion

11. April 2007

Roderich Tumulka

Mathematisches Institut, Eberhard-Karls-Universität,
Tübingen

Meine Forschungsthemen: Grundlagen der Quantentheorie

- Quantentheorie ohne Beobachter:
 - Bohmsche Mechanik: Teilchenbahnen für Quantenmechanik
 - * Relativistische Varianten?
 - * Ausdehnung auf Quantenfeldtheorie
 - * Ausdehnung auf Gravitation
 - GRW-Theorie: Spontaner Kollaps der Wellenfunktion
 - * Relativistische Variante
 - * Ausdehnung auf Quantenfeldtheorie
 - * Entwicklung eines GRW-Formalismus
- Quantenmechanik auf topologisch nicht-trivialen Mannigfaltigkeiten
- Quanten-Thermodynamik
 - Verteilung der Wellenfunktion im thermischen Gleichgewicht
 - Typischkeit der Dichtematrix $Z^{-1} e^{-\beta H}$

Die Zeitschrift *Science* (Juli 2005) nannte als eine der 25 wichtigsten Fragen der Naturwissenschaft in den nächsten 25 Jahren: *Do Deeper Principles Underlie Quantum Uncertainty and Nonlocality?*

Standard-Quantenformalismus

John von Neumann (1932):

- Der Zustand (zur Zeit t) eines Systems (aus N Teilchen) wird beschrieben durch $\psi_t : \mathbb{R}^{3N} \rightarrow \mathbb{C}$ mit $\psi_t \in L^2(\mathbb{R}^{3N})$ und $\|\psi_t\| = 1$.
- Solange das System isoliert ist: Schrödinger-Gleichung

$$i\hbar \frac{\partial \psi_t}{\partial t} = H\psi_t$$

wobei $H =$ selbst-adjungierter Hamilton-Operator

$$H = - \sum_{k=1}^N \frac{\hbar^2}{2m_k} \nabla_k^2 + V(\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_N)$$

mit $m_k =$ Masse und potentieller Energie $V : \mathbb{R}^{3N} \rightarrow \mathbb{R}$.

- Wenn eine “Messung” der “Observablen” A durchgeführt wird, sind die möglichen Ergebnisse die Eigenwerte α von A und treten auf mit Wahrscheinlichkeit

$$\langle \psi_t, P_\alpha \psi_t \rangle,$$

wobei P_α die orthogonale Projektion in L^2 auf den Eigenraum von A zum Eigenwert α ist. Dann kollabiert ψ_t zum Eigenvektor

$$\psi_{t+} = \frac{P_\alpha \psi_{t-}}{\|P_\alpha \psi_{t-}\|}.$$

Quantentheorie ohne Beobachter

Beispiele: Bohmsche Mechanik, GRW

Vorteil: ermöglicht Analyse des Messvorganges.

Ordinary quantum mechanics is just fine – for all practical purposes!
John S. Bell

Messproblem:

System mit Wellenfkt $\psi = \sum_i c_i |i\rangle$

Apparat mit Wellenfkt ϕ

Gesamt $\Psi_0 = \psi \otimes \phi$ wobei $|i\rangle$

↓ unitär

↓ unitär

$\Psi_t = \sum_i c_i \Phi_i$

Φ_i

Überlagerungszustand!

Ein Beispiel

Super-Auswahlregel: Ausnahme von

$$|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle \neq \text{mal } |\uparrow\rangle, \text{ mal } |\downarrow\rangle$$

Z.B. G = elektrische Gesamtladung des Universums.

Satz [Colin, Durt & Tumulka, *J. Phys. A* 2006] **über Super-Auswahlregeln.** Eine Quantentheorie sei gegeben durch den Hilbert-Raum \mathcal{H} , den Hamiltonian H , den Konfigurationsraum \mathcal{Q} und die Orts-Projektionen $P(B)$ für alle Borel-Mengen $B \subseteq \mathcal{Q}$. Einige technische Voraussetzungen mögen gelten. Wenn $G : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ ein beschränkter selbst-adjungierter Operator mit reinem Punktspektrum ist und

$$[G, H] = 0 = [G, P(B)] \quad \forall B \subseteq \mathcal{Q},$$

dann existiert zu jedem Zustandsvektor $\psi \in \mathcal{H}$ mit $\|\psi\| = 1$ ein Gemisch μ von Eigenvektoren von G derart, dass kein Experiment den Zustand ψ vom Gemisch μ unterscheiden kann.

Beweis: mit Bohmscher Mechanik.

Mathematische Formulierung: mit Bohmscher Mechanik.

Bohmsche Mechanik

In 1952 I saw the impossible done. Bell (1982)

[The quantum] paradoxes are simply disposed of by the
1952 theory of Bohm. Bell (1990)

Bohm (1952): Eine Wellenfunktion choreografiert die Bewegung von N Teilchen. Die Bahnen $\mathbf{Q}_k(t) \in \mathbb{R}^3$ genügen

$$\frac{d\mathbf{Q}_k}{dt} = \frac{\mathbf{j}_k(Q_t)}{\rho(Q_t)} = \frac{\frac{\hbar}{m_k} \operatorname{Im} \psi_t^* \nabla_k \psi_t}{\psi_t^* \psi_t}(Q_t),$$

wobei $Q_t = (\mathbf{Q}_1(t), \dots, \mathbf{Q}_N(t))$ die Konfiguration ist.
 $\psi_t : \mathbb{R}^{3N} \rightarrow \mathbb{C}$ gehorcht der Schrödinger-Gleichung

$$i\hbar \frac{\partial \psi_t}{\partial t} = H\psi_t.$$

- Kein Kollaps.
- Zustand (zur Zeit t) = (Q_t, ψ_t) .
- Welle–Teilchen Dualismus
- $|\psi|^2$ -Verteilung ist äquivariant
- Dürr, Goldstein & Zanghì (1992): In typischen Bohmschen Universen erscheint die Konfiguration eines Systems mit Wellenfunktion ψ als zufällig mit Verteilung $|\psi|^2$.
- BM \Rightarrow QM-Formalismus

GRW

ψ_t kollabiert *spontan*: stochastische Veränderung der Schrödinger-Gleichung

Ghirardi, Rimini & Weber (1986): Explizites Modell, Markoff-Sprungprozess im Hilbert-Raum.

Zwischen den Sprüngen:

$$i\hbar \frac{\partial \psi_t}{\partial t} = H\psi_t.$$

Warte zufällige Zeit ΔT , exponential-verteilt mit $\mathbb{E}\Delta T = \tau/N$,

$$\tau \approx 10^{15} \text{ sec} \approx 10^8 \text{ Jahre},$$

dann kollabiert ψ_t :

$$\psi_{t+} = \frac{e^{-(\mathbf{q}_k - \mathbf{Q})^2/2\sigma^2} \psi_{t-}}{\|e^{-(\mathbf{q}_k - \mathbf{Q})^2/2\sigma^2} \psi_{t-}\|}$$

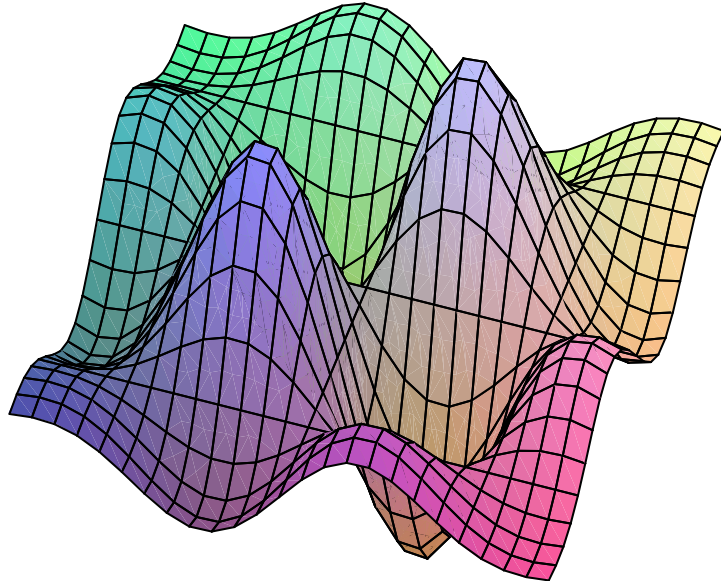
mit $\sigma = 10^{-7}$ m, k = rein zufällig gewähltes Teilchen, und \mathbf{Q} = zufälliger Punkt in \mathbb{R}^3 mit Verteilung

$$\mathbb{P}(\mathbf{Q} \in d^3\mathbf{q}) = \text{const.} \|e^{-(\mathbf{q}_k - \mathbf{q})^2/2\sigma^2} \psi_{t-}\|^2 d^3\mathbf{q}.$$

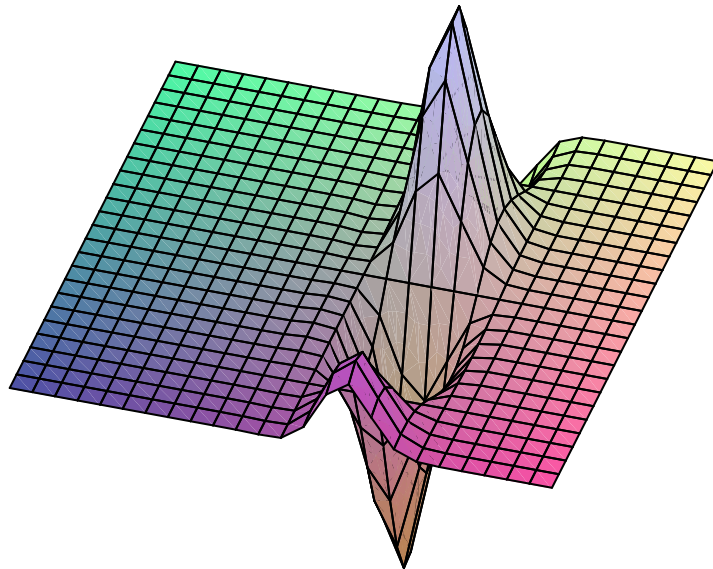
Vorhersagen \approx QM

GRW-Kollaps

Vorher:



Nachher:



POVM = positive-operator-valued measure

Definition. Ein POVM $E(\cdot)$ auf dem messbaren Raum (Ω, \mathcal{F}) mit Wirkung auf den Hilbert-Raum \mathcal{H} ist eine Abbildung $E : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ mit

- $E(B) : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ ist positiver Operator für $B \in \mathcal{F}$
- $E\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} E(B_n)$ falls B_n paarweise disjunkt,
- $E(\Omega) = 1$

Beispiel: PVM (projection-valued measure) Spektralzerlegung

Nutzen: $\psi \in \mathcal{H}, \|\psi\| = 1 \Rightarrow \langle \psi, E(\cdot)\psi \rangle$ ist W'keits-Maß

Physikalische Bedeutung: Gegeben eine Quantentheorie mit Hilbert-Raum \mathcal{H} und Hamiltonian H . Zu jedem Experiment (mit Werten in der Menge W) gibt es ein POVM $E(\cdot)$ auf W mit Wirkung auf \mathcal{H} , so dass das Ergebnis Z des Experimentes an einem System mit Wellenfunktion ψ die Verteilung

$$\mathbb{P}(Z \in B) = \langle \psi, E(B)\psi \rangle$$

hat.

Beweis [Dürr, Goldstein & Zanghì 2004]: mit Bohmscher Mechanik.

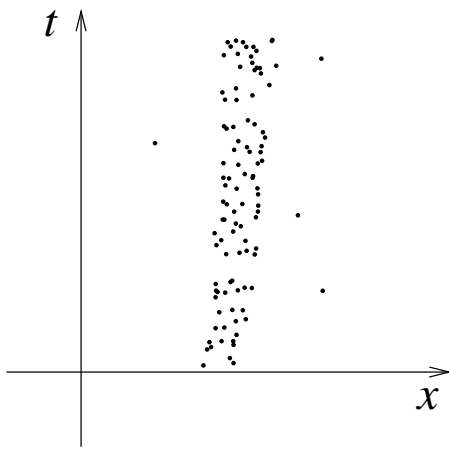
Beiträge zu POVMs

- Existenz Produkt-POVM $E_1 \otimes E_2$ auf $(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2)$ mit Wirkung auf $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ (unter technischen Voraussetzungen) [Dürr, Goldstein, Tumulka, Zanghì *Commun. Math. Phys.* 2005].

Beachte: $\langle \psi, E_1 \otimes E_2(\cdot) \psi \rangle$ ist kein Produkt-Maß (außer wenn $\psi = \psi_1 \otimes \psi_2$).

- Analogon für POVMs zum Kolmogoroff-Maßerweiterungssatz [Tumulka, Habil.schrift 2007]

Blitz-Ontologie



Statt Weltlinien der Teilchen;
erfunden von Bell (1987).

Für GRW: male einen Blitz
an den Mittelpunkt jedes Kollaps.

$$F = \{(T_1, Q_1), (T_2, Q_2), \dots\}$$

Gemeinsame Verteilung der Blitze:

$$\mathbb{P}^{\psi_0}(F \in B) = \langle \psi_0, G(B) \psi_0 \rangle$$

mit POVM $G(\cdot)$ auf dem “Pfadraum”

$$\Omega = \text{Raumzeit}^{\mathbb{N}}$$

Rolle der Wellenfunktion: legt die W’keiten für die Realität
(Ontologie) fest:

$$\psi \mapsto \mathbb{P}^{\psi}$$

Für unterscheidbare Teilchen: N Typen von Blitzen,

$$\Omega = (\text{Raumzeit} \times \{1, \dots, N\})^{\mathbb{N}}$$

Eine Anwendung der Blitz-Ontologie

Satz [Tumulka 2007] **über die empirischen Voraussagen von GRW.** Zu jedem Experiment (mit Werten in der Menge W) gibt es ein POVM $\tilde{E}(\cdot)$ auf W mit Wirkung auf \mathcal{H} , so dass das Ergebnis Z des Experimentes an einem System mit Wellenfunktion ψ die Verteilung

$$\mathbb{P}(Z \in B) = \langle \psi, \tilde{E}(B) \psi \rangle$$

hat.

Fazit: Dasselbe Experiment hat in GRW andere Operatoren.

Mathematische Formulierung: mit Blitz-Ontologie. Sei $\psi \in L^2(\mathbb{R}^{3N})$, $\phi \in L^2(\mathbb{R}^{3M})$ (Zustand des Apparats vor dem Experiment), H ein selbst-adjungierter Hamiltonian auf $L^2(\mathbb{R}^{3(N+M)})$, F der zugehörige GRW-Blitzprozess,

- $Z = \zeta(F)$ mit messbarer Funktion $\zeta : \Omega \rightarrow W$
- $\Psi_0 = \psi \otimes \phi$ (Zustand vor dem Experiment).

Dann gibt es ein POVM $\tilde{E}(\cdot)$ auf W , so dass für alle $\psi \in L^2(\mathbb{R}^{3N})$ gilt

$$\mathbb{P}(Z \in B) = \langle \psi, \tilde{E}(B) \psi \rangle .$$

Relativistische (Lorentz-) Invarianz

Those paradoxes are simply disposed of by the 1952 theory of Bohm, leaving as the question, the question of Lorentz invariance. So one of my missions in life is to get people to see that if they want to talk about the problems of quantum mechanics – the real problems of quantum mechanics – they must be talking about Lorentz invariance. John S. Bell (1990)

The big question, in my opinion, is which, if either, of these two precise pictures [GRW and Bohm] can be redeveloped in a Lorentz invariant way. Bell (1990)

[N]either of these theories [GRW and Bohm] is Lorentz invariant, and ... it is pretty clear that no theory in either of the classes ... can do without an ‘absolute time’ parameter. [However,] in my view, *present-day* quantum cosmology *does already* involve a ‘background’ time parameter. Hilary Putnam (2005)

Neither hidden variable theories nor mechanisms of the GRW type for wave function collapse can be made relativistic.

John H. Conway & Simon Kochen (2005)

Relativität

- Einstein (1905, 1915): Raumzeit = 4-Mannigfaltigkeit mit Lorentzscher (pseudo-Riemannscher) Metrik

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & +1 & & \\ & & +1 & \\ & & & +1 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{in einer} \\ \text{geeigneten} \\ \text{Basis} \end{array}$$

- Lorentz-Gruppe = $SO(1, 3)$.
- Ersetze die Schrödinger-Gleichung durch die Dirac-Gleichung:
 $\psi : \text{Raumzeit}^N \rightarrow (\mathbb{C}^4)^{\otimes N}$

Nichtlokalität

Bell (1964): QM $\Rightarrow \exists$ überlichtschnelle Einflüsse

(benutzt die Verletzung der “Bellschen Ungleichung”)

Allerdings können Botschaften nicht schneller als Licht übertragen werden.

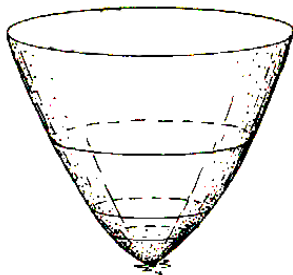
Probleme für Bohm und GRW

- Nichtlokalität mit Relativität vereinbaren
- Für jede raumartige 3-Fläche Σ definiert ψ eine W'keits-Verteilung $\rho = |\psi|^2$ und einen Strom j auf Σ^N . Aber es gibt keine 3-Fläche der *Gleichzeitigkeit*. Auf welcher 3-Fläche sollen wir $|\psi|^2$ oder j auswerten?

Relativistische Bohmsche Mechanik

Zwei Ansätze:

- Goldstein & Tumulka [2003]:
 j^ψ auf $\Sigma =$ Zukunfts-Lichtkegel auswerten. Gesetz für Teilchenbahnen, *nichtlokal und Lorentz-invariant*, enthält eine Paradoxie-freie Art von Retrokausation.
Nachteil: da $|\psi|^2$ nicht äquivariant ist, liefert die Theorie keine W'keits-Voraussagen, und daher auch keine Erklärung der QM
- Dürr, Goldstein, Münch-Berndl & Zanghì [1999] (in flacher Raumzeit);
Tumulka [Diss. 2001] (in gekrümmter Raumzeit mit Beweis der Äquivarianz):
Abänderung der Relativitätstheorie durch Einführung einer bevorzugten Blätterung \mathcal{F} der Raumzeit in raumartige 3-Flächen. Dann besitzt Bohmsche Mechanik eine einfache und natürliche Erweiterung auf relativistische Raumzeit, wobei j^ψ auf den Blättern von \mathcal{F} ausgewertet wird.



Z.B. bestehe \mathcal{F} aus den Niveauflächen der Funktion $T : (\text{Raumzeit}) \rightarrow \mathbb{R}$,
 $T(x) = \text{Zeit-Abstand}(x, \text{Urknall})$.

Zeichnung: R. Penrose

Relativistisches GRW

Nicht Augenmerk auf den Kollaps der Wellenfunktion, sondern auf die gemeinsame Verteilung der Blitze: das ist die Materie!

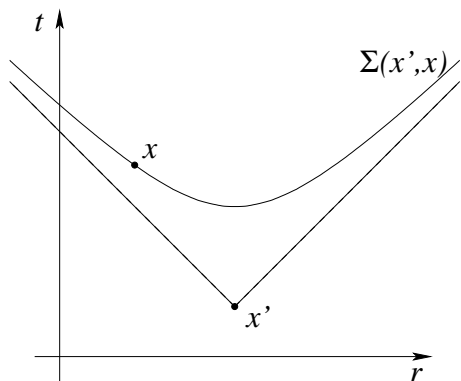
Modell [Tumulka, *J. Statist. Phys.* 2006] (für N nicht-wechselwirkende “Teilchen”):

Punktprozess F in der Raumzeit, Lorentz-invariant aber nicht-lokal (verletzt die Bellsche Ungleichung), mit Verteilung

$$\mathbb{P}^\psi(\cdot) = \langle \psi, G_{x_1 \dots x_N}(\cdot) \psi \rangle$$

$G_{x_1 \dots x_N}(\cdot)$ ist POVM auf $(\text{Raumzeit} \times \{1, \dots, N\})^{\mathbb{N}}$, x_k ein Anfangsblitz vom Typ k .

Anfangsdaten: ψ, x_1, \dots, x_N (erster Blitz von jedem Typ)



Konstruktionselement:

Voriger Blitz x' definiert
 3-Fläche $\Sigma_{\Delta T}(x') =$
 $\{\text{Punkte mit zeitartigem Abstand } \Delta T \text{ von } x' \text{ in } \text{Zuk}(x')\}.$

Relativistisches GRW

Für ein “Teilchen”:

- Wähle zufällig ΔT (Wartezeit in Eigenzeit) exp-verteilt (Rate = $1/\tau$)
- Betrachte 3-Fläche $\Sigma = \Sigma_{\Delta T}(x')$
- U_A^B = unitäre Dirac-Entwicklung von 3-Fläche A nach B
- $\psi_\Sigma := U_0^\Sigma \psi_0$ (unitär)
- Sei j_x die Gauß-Fkt auf Σ
- Wähle zufällig X (den nächsten Blitz) auf Σ mit Verteilung “ $|\psi_\Sigma|^2 * j$ ”
- Kollaps (Multiplikations-Operator auf Σ): $\psi_\Sigma \mapsto j_X \psi_\Sigma$

Anders gesagt:

- G_{x^0} ist POVM auf Raumzeit $^{\mathbb{N}}$, $x^0 = \text{Anfangsblitz}$
- $G_{x^0}(dx^1 dx^2 \dots) =$

$$= \left(K_{x^0}^*(x^1) K_{x^1}^*(x^2) \dots \right) \left(\dots K_{x^1}(x^2) K_{x^0}(x^1) \right) dx^1 dx^2 \dots,$$

$$K_{x'}(x) = 1_{x \in \text{Zuk}(x')} e^{-\Delta T/2\tau} U_\Sigma^0 j_x^{1/2} U_0^\Sigma,$$

Für N “Teilchen”:

- $G_{x_1 \dots x_N}$ ist ein Produkt-POVM, $G_{x_1 \dots x_N} = G_{x_1} \otimes \dots \otimes G_{x_N}$ (aber \mathbb{P}^ψ ist keine Produkt-Verteilung!)

Was genau heißt hier “relativistisch”?

- Koordinatensysteme wurden zur Konstruktion erst gar nicht benutzt.
- Jede raumartige 3-Fläche Σ lässt sich für ein Anfangswertproblem benutzen, das die Verteilung der Blitze in der Zukunft von Σ liefert.

– Das heißt: Es gibt eine Wellenfunktion ψ_Σ derart, dass die bedingte Verteilung

$$\mathbb{P}\left(F \cap \text{Zuk}(\Sigma) \in \cdot \mid F \cap \text{Verg}(\Sigma)\right) = \langle \psi_\Sigma, G_{x_1 \dots x_N}^\Sigma(\cdot) \psi_\Sigma \rangle$$

ist, wobei x_k der letzte Blitz vom Typ $k \in \{1, \dots, N\}$ vor Σ ist.

– $G_{x_1 \dots x_N}^\Sigma$ ist ein POVM auf $\text{Zuk}(\Sigma)^\mathbb{N}$.

– Daher: Für das Anfangswertproblem auf Σ braucht man folgende Daten:

$$\psi_\Sigma, x_1, \dots, x_N$$

- Kausalität: Die Verteilung der Blitze bis zu einer 3-Fläche Σ' hängt nicht von den äußeren Feldern in der Zukunft von Σ' ab. (“Parameter Independence”)
- “No signalling”: Botschaften können nicht schneller als Licht übertragen werden.

Nichtlokal & relativistisch

Nichtlokal: Blitze in A beeinflussen Blitze in B —*oder umgekehrt!*

Die Richtung des Einflusses hängt vom Koordinatensystem ab.
Wie kann das sein?

Beispiel [Conway & Kochen 2006]:

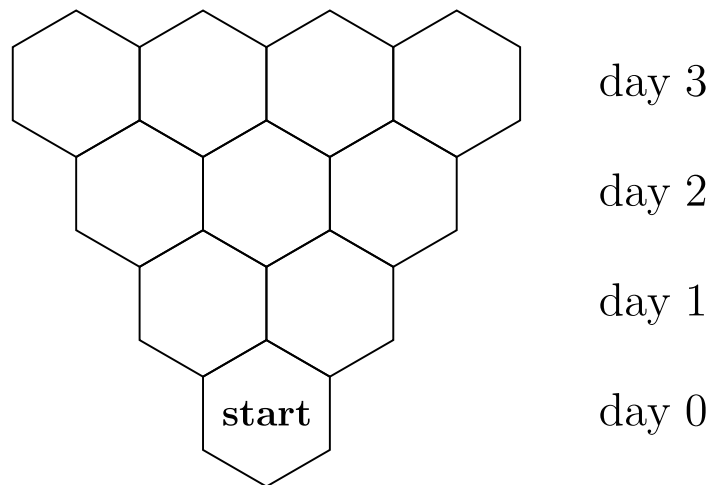
Diskrete 1 + 1-dim. Raumzeit $\subseteq \mathbb{Z}^2$,

$\phi : \text{Raumzeit} \rightarrow \{0, 1\}$ gehorcht 2 Gesetzen:

1. $\phi(x) + \phi(y) + \phi(z) \in \{0, 2\}$

wenn x, y, z Nachbarn mit $T(x) < T(y) = T(z)$

2. $\mathbb{P}(\phi(x) = 1 \mid \phi(y) \forall y : T(y) < T(x)) = 1/2.$



Fazit

- GRW mit Blitz-Ontologie:
Realistisch und relativistisch ist kein Widerspruch
- Gegenwärtig haben wir die Wahl zwischen:
 - entweder einer kleinen Änderung in den Vorhersagen der Quantentheorie (das folgt aus GRW)
 - oder einer Änderung unseres Verständnisses der Relativitätstheorie, nämlich eine bevorzugte Blätterung zu erlauben (dann kann man Bohmsche Bahnen definieren)
- Mathematische Struktur von Quantentheorien ohne Beobachter
 $\Psi \mapsto \mathbb{P}^\Psi$ W'keits-Maß auf dem Raum der Historien
- Alles offen: Quanten-Kosmologie