

Die Punktprozesse der GRW-Theorie des Kollapses der Wellenfunktion

29. Juni 2007

Roderich Tumulka

Mathematisches Institut, Eberhard-Karls-Universität,
Tübingen

Standard-Quantenformalismus

John von Neumann (1932):

- Der Zustand (zur Zeit t) eines Systems (aus N Teilchen) wird beschrieben durch $\psi_t : \mathbb{R}^{3N} \rightarrow \mathbb{C}$ mit $\psi_t \in L^2(\mathbb{R}^{3N})$ und $\|\psi_t\| = 1$.
- Solange das System isoliert ist: Schrödinger-Gleichung

$$i\hbar \frac{\partial \psi_t}{\partial t} = H\psi_t$$

wobei $H =$ selbst-adjungierter Hamilton-Operator

$$H = - \sum_{k=1}^N \frac{\hbar^2}{2m_k} \nabla_k^2 + V(\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_N)$$

mit $m_k =$ Masse und potentieller Energie $V : \mathbb{R}^{3N} \rightarrow \mathbb{R}$.

- Wenn eine “Messung” der “Observablen” A durchgeführt wird, sind die möglichen Ergebnisse die Eigenwerte α von A und treten auf mit Wahrscheinlichkeit

$$\langle \psi_t | P_\alpha \psi_t \rangle,$$

wobei P_α die orthogonale Projektion in L^2 auf den Eigenraum von A zum Eigenwert α ist. Dann kollabiert ψ_t zum Eigenvektor

$$\psi_{t+} = \frac{P_\alpha \psi_{t-}}{\|P_\alpha \psi_{t-}\|}.$$

Quantentheorie ohne Beobachter

Ordinary quantum mechanics is just fine – for all practical purposes! John S. Bell

Beispiele: Bohmsche Mechanik, GRW

Vorteil: ermöglicht Analyse des Messvorganges.

Nutzen: ein Beispiel

Physik-Satz. Gegeben eine Quantentheorie mit Hilbert-Raum \mathcal{H} und Hamiltonian H . Zu jedem Experiment (mit Werten in der Menge W) gibt es ein POVM $E(\cdot)$ auf W mit Wirkung auf \mathcal{H} , so dass das Ergebnis R des Experimentes an einem System mit Wellenfunktion ψ die Verteilung

$$\mathbb{P}(R \in A) = \langle \psi | E(A) \psi \rangle$$

hat.

Beweis [Dürr, Goldstein & Zanghì 2004]: mit Bohmscher Mechanik.
[Tumulka 2007]: mit GRW-Theorie

POVM = positive-operator-valued measure

Definition. Ein POVM $E(\cdot)$ auf dem messbaren Raum (Ω, \mathcal{A}) mit Wirkung auf den Hilbert-Raum \mathcal{H} ist eine Abbildung $E : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ mit

- $E(A) : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ ist positiver Operator für $A \in \mathcal{A}$
- schwach σ -additiv:
$$E\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} E(A_n)$$
 falls A_n paarweise disjunkt,
schwache Konv. $\forall \psi : \langle \psi | E(\cup A_n) \psi \rangle = \sum_n \langle \psi | E(A_n) \psi \rangle$
- $E(\Omega) = I$ (Identität)

Beispiel: PVM (projection-valued measure) Spektralzerlegung

Bem.: $\psi \in \mathcal{H}, \|\psi\| = 1 \Rightarrow \langle \psi | E(\cdot) \psi \rangle$ ist W'keits-Maß

Noch ein Beispiel

Super-Auswahlregel: Ausnahme von

$$|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle \neq \text{mal } |\uparrow\rangle, \text{ mal } |\downarrow\rangle$$

Z.B. $T =$ elektrische Gesamtladung des Universums.

Physik-Satz [Colin, Durt & Tumulka, *J. Phys. A* 2006] **über Super-Auswahlregeln.** Eine Quantentheorie sei gegeben durch den Hilbert-Raum \mathcal{H} , den Hamiltonian H , den Konfigurationsraum \mathcal{Q} und die Orts-Projektionen $P(A)$ für alle Borel-Mengen $A \subseteq \mathcal{Q}$. Einige technische Voraussetzungen mögen gelten. Wenn $T : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ ein beschränkter selbst-adjungierter Operator mit reinem Punktspektrum ist und

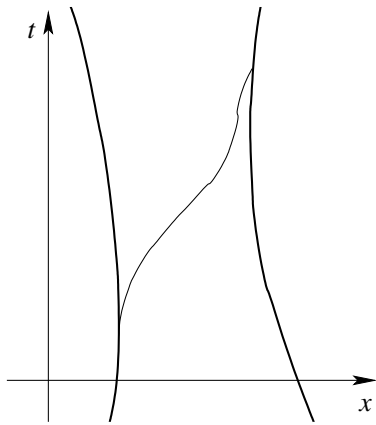
$$[T, H] = 0 = [T, P(A)] \quad \forall A,$$

dann existiert zu jedem Zustandsvektor $\psi \in \mathcal{H}$ mit $\|\psi\| = 1$ ein Gemisch μ von Eigenvektoren von T derart, dass kein Experiment den Zustand ψ vom Gemisch μ unterscheiden kann.

Beweis: mit Bohmscher Mechanik.

Mathematische Formulierung: mit Bohmscher Mechanik.

Primitive Ontologie



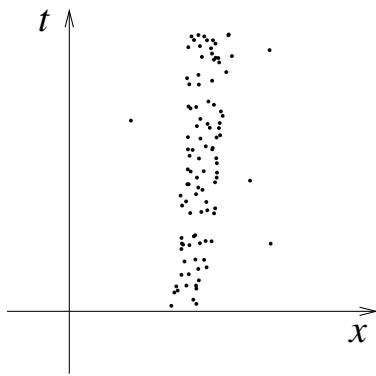
Bohmsche Mechanik

Teilchen: Weltlinien in der Raumzeit

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{j(Q)}{\rho(Q)}, \quad i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = H\psi$$

$$j = \frac{\hbar}{m} \text{Im} \psi^* \nabla \psi, \quad \rho = \psi^* \psi$$

$$\mathbb{P}(Q_{t=0} \in A) = \int_A d^{3N}q |\psi(q, t=0)|^2$$



GRWf

Blitze (“flashes”): Weltpunkte, erfunden von Bell (1987).

Punktprozess = zufällige Punktmenge F

$$\mathbb{P}(F \in \cdot) = \langle \psi_0 | G(\cdot) \psi_0 \rangle$$

$$G(\cdot) = \text{POVM}$$

GRWm

Materiedichte $m : \mathbb{R}^4 \rightarrow [0, \infty)$

$$m(\mathbf{x}, t) = \sum_{i=1}^N \int_{\mathbb{R}^{3N}} d^{3N}q \delta(\mathbf{q}_i - \mathbf{x}) |\psi(q, t)|^2$$

Kopenhagener QM (Niels Bohr 1935)

Messergebnisse; makroskopische Körper klassisch beschrieben

GRW

ψ_t kollabiert *spontan*: stochastische Veränderung der Schrödinger-Gleichung

Ghirardi, Rimini & Weber (1986): Explizites Modell, Markoff-Sprungprozess im Hilbert-Raum.

Zwischen den Sprüngen:

$$i\hbar \frac{\partial \psi_t}{\partial t} = H\psi_t.$$

Warte zufällige Zeit ΔT , exponential-verteilt mit $\mathbb{E}\Delta T = 1/N\lambda$,

$$\lambda \approx 10^{-15} \text{ sec}^{-1} \approx 1/(10^8 \text{ Jahre}),$$

dann kollabiert ψ_t :

$$\psi_{t+} = \frac{e^{-(\mathbf{q}_i - \mathbf{Q})^2/2\sigma^2} \psi_{t-}}{\|e^{-(\mathbf{q}_i - \mathbf{Q})^2/2\sigma^2} \psi_{t-}\|}$$

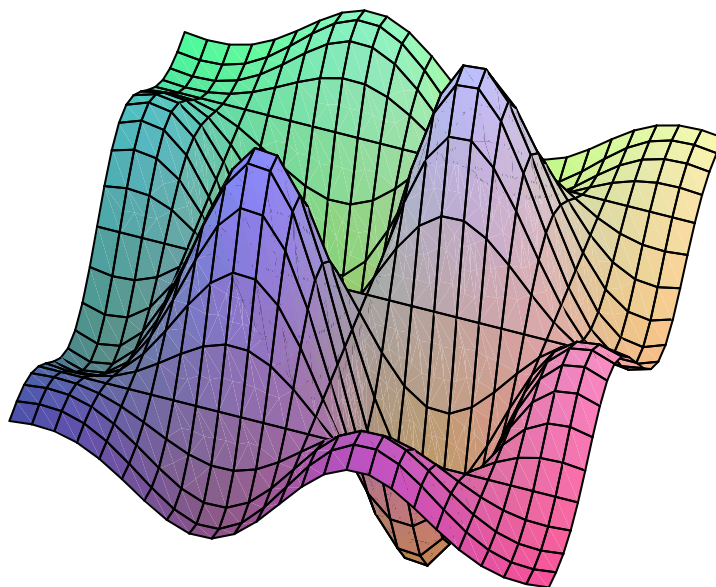
mit $\sigma = 10^{-7}$ m, i = rein zufällig gewähltes Teilchen, und \mathbf{Q} = zufälliger Punkt in \mathbb{R}^3 mit Verteilung

$$\mathbb{P}(\mathbf{Q} \in d^3\mathbf{q}) = \text{const.} \|e^{-(\mathbf{q}_i - \mathbf{q})^2/2\sigma^2} \psi_{t-}\|^2 d^3\mathbf{q}.$$

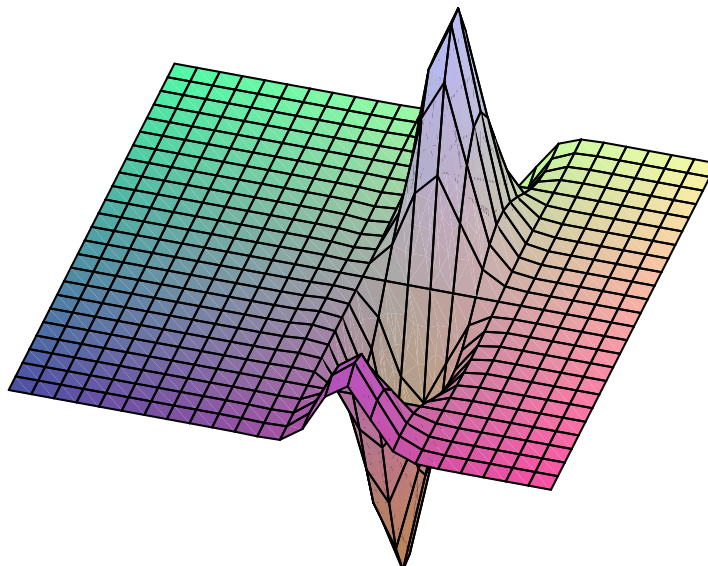
Vorhersagen \approx QM

GRW-Kollaps

Vorher:



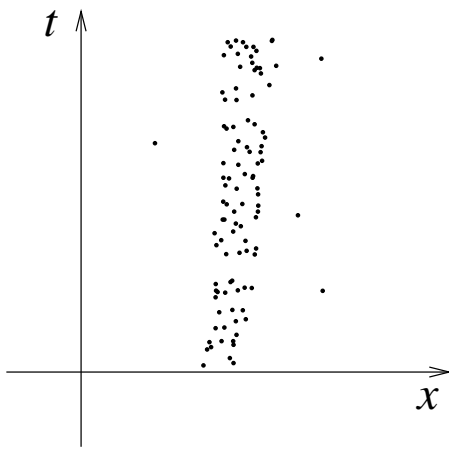
Nachher:



Wissenschaftler, die über spontanen Kollaps publiziert haben:

1980-er Jahre	GianCarlo Ghirardi Alberto Rimini Tullio Weber V. P. Belavkin	John S. Bell Philip Pearle Lajos Diósi Adrian Kent
1990-er Jahre	Roger Penrose David Z. Albert Nicolas Gisin Renata Grassi Rob Clifton	Sheldon Goldstein Chris Dove Euan Squires F. Benatti Bradley Monton
2000-er Jahre	Anthony Leggett Stephen L. Adler Angelo Bassi Tim Maudlin Peter Lewis John H. Conway Simon Kochen Philippe Blanchard Arkadiusz Jadczyk Andreas Ruschhaupt Joe Henson Isabelle Herbauts	Fay Dowker Nino Zanghì Hilary Putnam Valia Allori Ludovico Lanz Bassano Vacchini Dorje C. Brody Lane P. Hughston O. Nicosini Roman Frigg Davide Salvetti

GRWf: Kollaps und Blitz-Ontologie



Mache einen Blitz an den Mittelpunkt jedes Kollaps.

$$F = \{(T_1, Q_1), (T_2, Q_2), \dots\}$$

Gemeinsame Verteilung der Blitze =: \mathbb{P}^{ψ_0}

Satz. [Tumulka 2007] Für jedes $\psi \in \mathcal{H}$ mit $\|\psi\| = 1$ existiert \mathbb{P}^ψ , ist eindeutig, und

$$\mathbb{P}^\psi(F \in A) = \langle \psi | G(A) \psi \rangle \quad \forall A \in \mathcal{A}$$

mit POVM $G(\cdot)$ auf dem “Pfadraum”

$$\Omega = \text{Raumzeit}^{\mathbb{N}}.$$

Rolle der Wellenfunktion: legt die W’keiten für die Realität (Ontologie) fest:

$$\psi \mapsto \mathbb{P}^\psi$$

Für “unterscheidbare Teilchen”: N Typen von Blitzen,

$$\Omega = (\text{Raumzeit} \times \{1, \dots, N\})^{\mathbb{N}}$$

Kolmogoroff-Maßerweiterung für POVMs

Satz. [Tumulka 2007] Sei (M, \mathcal{A}) ein Borel-Raum und $G_n(\cdot)$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein POVM auf $(M^n, \mathcal{A}^{\otimes n})$. Wenn die Familie $\{G_n(\cdot)\}_n$ die Konsistenz-Bedingung

$$G_{n+1}(A \times M) = G_n(A) \quad \forall A \in \mathcal{A}^{\otimes n}$$

erfüllt, dann existiert ein eindeutiges POVM $G(\cdot)$ auf $(M^{\mathbb{N}}, \mathcal{A}^{\otimes \mathbb{N}})$ mit

$$G_n(A) = G(A \times M^{\mathbb{N}}) \quad \forall A \in \mathcal{A}^{\otimes n}.$$

Außerdem existiert für jedes $\psi \in \mathcal{H}$ mit $\|\psi\| = 1$ ein eindeutiges Wahrscheinlichkeitsmaß μ auf $(M^{\mathbb{N}}, \mathcal{A}^{\otimes \mathbb{N}})$ so dass

$$\mu(A \times M^{\mathbb{N}}) = \langle \psi | G_n(A) \psi \rangle \quad \forall A \in \mathcal{A}^{\otimes n}.$$

Tatsächlich $\mu(\cdot) = \langle \psi | G(\cdot) \psi \rangle$.

Experimente in GRWf

Physik-Satz. [Tumulka 2007 für GRWf] Zu jedem Experiment (mit Werten in der Menge W) gibt es ein POVM $E(\cdot)$ auf W mit Wirkung auf \mathcal{H} , so dass das Ergebnis R des Experimentes an einem System mit Wellenfunktion ψ die Verteilung

$$\mathbb{P}(R \in A) = \langle \psi | E(A) \psi \rangle$$

hat.

Mathematische Formulierung: mit Blitz-Ontologie. Sei

- $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{\text{Sys}} \otimes \mathcal{H}_{\text{Umg}}$,
- F ein Blitzprozess mit Verteilung $\langle \Psi_0 | G(\cdot) \Psi_0 \rangle$ in Ω ,
- $G(\cdot)$ ein POVM mit Wirkung auf \mathcal{H} ,
- $\phi \in \mathcal{H}_{\text{Umg}}$ (Zustand des Apparats vor dem Experiment) mit $\|\phi\| = 1$,
- $R = \zeta(F)$ mit messbarer Funktion $\zeta : \Omega \rightarrow W$
- $\forall \psi \in \mathcal{H}$ mit $\|\psi\| = 1$: $\Psi_0 = \psi \otimes \phi$ (Zustand vor dem Experiment).

Dann gibt es ein POVM $E(\cdot)$ auf W , so dass für alle $\psi \in \mathcal{H}_{\text{Sys}}$ gilt

$$\mathbb{P}(R \in A) = \langle \psi | E(A) \psi \rangle_{\text{Sys}} \quad \forall A \in \mathcal{A}_\Omega.$$

GRWf-Schema: Quantenfeldtheorie

[Tumulka, *Proc. Royal Soc. A* 2006] Verallgemeinerung von GRWf für “identische Teilchen” und QFT: Blitzratendichte

$$r(\mathbf{q}, t) = \langle \psi_t | \Lambda(\mathbf{q}) \psi_t \rangle$$

mit Blitzraten-Operator $\Lambda(\mathbf{q}) \geq 0 \quad \forall \mathbf{q} \in \mathbb{R}^3$.

Bei Blitz Kollaps:

$$\psi_{t+} = \frac{\Lambda(\mathbf{Q})^{1/2} \psi_{t-}}{\|\Lambda(\mathbf{Q})^{1/2} \psi_{t-}\|}$$

dazwischen modifizierte Schrödinger-Gleichung

$$i\hbar \frac{\partial \psi_t}{\partial t} = H \psi_t - \frac{i\hbar}{2} \Lambda(\mathbb{R}^3) \psi_t + \frac{i\hbar}{2} \langle \psi_t | \Lambda(\mathbb{R}^3) \psi_t \rangle \psi_t,$$

wobei

$$\Lambda(\mathbb{R}^3) = \int_{\mathbb{R}^3} d^3 \mathbf{q} \Lambda(\mathbf{q})$$

als schwaches Integral, d.h. $\langle \psi | \Lambda(\mathbb{R}^3) \psi \rangle = \int d^3 \mathbf{q} \langle \psi | \Lambda(\mathbf{q}) \psi \rangle$

Beispiel 1: [GRW 1986] Quantenmechanik, $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^{3N})$

$$\Lambda_i(\mathbf{Q}) \psi(\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_N) = \frac{\lambda}{(2\pi\sigma^2)^{3/2}} e^{-(\mathbf{q}_i - \mathbf{Q})^2 / 2\sigma^2} \psi(\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_N)$$

“Identische Teilchen”: summiere über i

Beispiel 2: [Tumulka, *PRSA* 2006] Quantenfeldtheorie

$$\Lambda(\mathbf{q}) = f * N(\mathbf{q}) \text{ oder } \Lambda(\mathbf{q}) = f * M(\mathbf{q})$$

f = Gauß-Fkt mit Breite σ , $N(\mathbf{q})$ = Teilchenzahldichte-Operator, $M(\mathbf{q})$ = Massendichte-Operator

GRWf-Schema

Satz. [Tumulka 2007] Sei

- $(\mathcal{Q}, \mathcal{A}_{\mathcal{Q}})$ ein Borel-Raum,
- μ ein σ -endliches Maß auf \mathcal{Q} ,
- für jedes $\mathbf{q} \in \mathcal{Q}$ sei $\Lambda(\mathbf{q}) \geq 0$ beschränkt,
- $\mathbf{q} \mapsto \Lambda(\mathbf{q})$ schwach messbar
- $\Lambda(\mathcal{Q}) = \int_{\mathcal{Q}} \mu(d\mathbf{q}) \Lambda(\mathbf{q})$ existiert als beschränkter Operator
- H selbst-adjungiert und beschränkt.

Dann existiert für jedes $\psi \in \mathcal{H}$ mit $\|\psi\| = 1$ ein GRWf-Prozess F ; die Verteilung \mathbb{P}^{ψ} ist eindeutig und von der Form $\mathbb{P}^{\psi}(\cdot) = \langle \psi | G(\cdot) \psi \rangle$ mit POVM $G(\cdot)$.

Dies gilt immer noch für zeitabhängige Hamiltonians $H(t)$ und Blitzraten-Operatoren $\Lambda(\mathbf{q}, t)$, falls

- $t \mapsto H(t)$ schwach messbar, $\int_{t_0}^t \|H(s)\| ds < \infty$
- $(\mathbf{q}, t) \mapsto \Lambda(\mathbf{q}, t)$ schwach messbar, $\int_{t_0}^t \|\Lambda(\mathcal{Q}, s)\| ds < \infty$

Es gilt immer noch, wenn H und Λ von den bisherigen Blitzen abhängen (auf schwach messbare Weise).

Relativistische (Lorentz-) Invarianz

Those paradoxes are simply disposed of by the 1952 theory of Bohm, leaving as the question, the question of Lorentz invariance. So one of my missions in life is to get people to see that if they want to talk about the problems of quantum mechanics – the real problems of quantum mechanics – they must be talking about Lorentz invariance. John S. Bell (1990)

The big question, in my opinion, is which, if either, of these two precise pictures [GRW and Bohm] can be redeveloped in a Lorentz invariant way. Bell (1990)

[N]either of these theories [GRW and Bohm] is Lorentz invariant, and ... it is pretty clear that no theory in either of the classes ... can do without an ‘absolute time’ parameter. [However,] in my view, *present-day* quantum cosmology *does already* involve a ‘background’ time parameter. Hilary Putnam (2005)

Neither hidden variable theories nor mechanisms of the GRW type for wave function collapse can be made relativistic.

John H. Conway & Simon Kochen (2005)

Relativität

- Einstein (1905, 1915): Raumzeit $M = 4$ -Mannigfaltigkeit mit Lorentzsch (pseudo-Riemannsch) Metrik

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} +1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{in einer} \\ \text{geeigneten} \\ \text{Basis} \end{array}$$

+ Zeit-Orientierung

- Lorentz-Gruppe = $SO(1, 3)$.
- Ersetze die Schrödinger-Gleichung durch die Dirac-Gleichung:

$$-i\hbar\gamma^\mu(\nabla_\mu - \frac{ie}{\hbar}A_\mu)\psi = m\psi$$

$\psi : M^N \rightarrow (\mathbb{C}^4)^{\otimes N}$ (genauer: Schnitt durch Dirac-Bündel)

Nichtlokalität

Bell (1964): QM $\Rightarrow \exists$ überlichtschnelle Einflüsse

(benutzt die Verletzung der “Bellschen Ungleichung”)

Allerdings können Botschaften nicht schneller als Licht übertragen werden.

Problem für Quantentheorie ohne Beobachter:

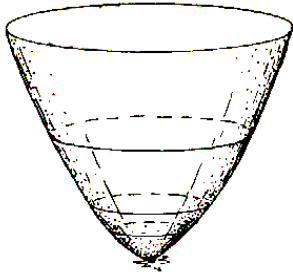
Nichtlokalität mit Relativität vereinbaren

Bohmsche Mechanik in relativistischer Raumzeit

Dürr, Goldstein, Münch-Berndl & Zanghì [1999] (in flacher Raumzeit);
Tumulka [Diss. 2001] (in gekrümmter Raumzeit):

Abänderung der Relativitätstheorie durch Einführung einer bevorzugten Blätterung \mathcal{F} von M in raumartige 3-Flächen.

Dann besitzt Bohmsche Mechanik eine einfache und natürliche Erweiterung auf relativistische Raumzeit, wobei der W'keitsstrom j^ψ auf den Blättern von \mathcal{F} ausgewertet wird.



Z.B. bestehe \mathcal{F} aus den Niveauflächen
der Funktion $T : M \rightarrow \mathbb{R}$,
 $T(x) = \text{Zeit-Abstand}(x, \text{Urknall})$.

Zeichnung: R. Penrose

Relativistische GRW-Theorie

Nicht Augenmerk auf den Kollaps der Wellenfunktion, sondern auf die gemeinsame Verteilung der Blitze: das ist die Materie!

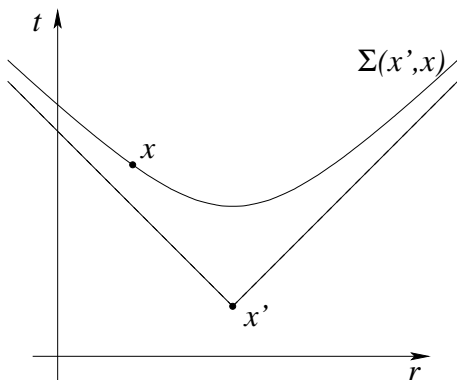
Modell [Tumulka, *J. Statist. Phys.* 2006] (für N nicht-wechselwirkende “Teilchen”):

Punktprozess F in der Raumzeit, Lorentz-invariant aber nicht-lokal (verletzt die Bellsche Ungleichung), mit Verteilung

$$\mathbb{P}^\psi(\cdot) = \langle \psi | G_{x_{1,0} \dots x_{N,0}}(\cdot) \psi \rangle$$

$G_{x_{1,0} \dots x_{N,0}}(\cdot)$ ist POVM auf $(M \times \{1, \dots, N\})^{\mathbb{N}}$, $x_{k,0} \in M$ ein Anfangsblitz vom Typ k .

Anfangsdaten: $\psi, x_{1,0}, \dots, x_{N,0}$ (erster Blitz von jedem Typ)



Konstruktionselement:

Voriger Blitz x' definiert
 3-Fläche $\mathbb{H}_{\Delta T}(x') =$
 $\{\text{Punkte mit zeitartigem Abstand } \Delta T \text{ von } x' \text{ in } \text{Zuk}(x')\}.$

Relativistische GRW-Theorie

Für ein “Teilchen”:

- Wähle zufällig ΔT (Wartezeit in Eigenzeit) exp-verteilt (Rate = λ)
- Betrachte 3-Fläche $\Sigma = \mathbb{H}_{\Delta T}(x')$
- U_A^B = unitäre Dirac-Entwicklung von 3-Fläche A nach B
- $\psi_\Sigma := U_0^\Sigma \psi_0$ (unitär)
- Sei ℓ_x die Gauß-Fkt auf Σ
- Wähle zufällig X (den nächsten Blitz) auf Σ mit Verteilung “ $|\psi_\Sigma|^2 * \ell$ ”
- Kollaps (Multiplikations-Operator auf Σ): $\psi_\Sigma \mapsto \ell_X \psi_\Sigma$

Anders gesagt:

- $G_{x_0}(\cdot)$ ist POVM auf $M^{\mathbb{N}}$, $x_0 \in M = \text{Anfangsblitz}$
- $G_{x_0}(dx_1 \cdots dx_n \times M^{\mathbb{N}}) = K^*(x_0, \dots, x_n) K(x_0, \dots, x_n) dx_1 \cdots dx_n$

$$K(x_0, \dots, x_n) = K_{x_{n-1}}(x_n) \cdots K_{x_1}(x_2) K_{x_0}(x_1),$$

$$K_{x'}(x) = 1_{x \in \text{Zuk}(x')} e^{-\lambda \tau(x, x')/2} U_\Sigma^0 \ell_x^{1/2} U_0^\Sigma,$$

mit $\tau(x, x') = \text{Zeit-Abstand}(x, x')$.

Für N “Teilchen”:

- $G_{x_{1,0} \dots x_{N,0}}$ ist ein Produkt-POVM, $= G_{x_{1,0}} \otimes \cdots \otimes G_{x_{N,0}}$ (aber \mathbb{P}^ψ ist keine Produkt-Verteilung!)

Was heißt “relativistisch”?

- Koordinatensysteme wurden zur Konstruktion erst gar nicht benutzt.
- Jede raumartige 3-Fläche Σ lässt sich für ein Anfangswertproblem benutzen, das die Verteilung der Blitze in der Zukunft von Σ liefert.

– Das heißt: Es gibt eine Wellenfunktion ψ_Σ derart, dass die bedingte Verteilung

$$\mathbb{P}\left(F \cap \text{Zuk}(\Sigma) \in \cdot \mid F \cap \text{Verg}(\Sigma)\right) = \langle \psi_\Sigma \mid G_{x_1 \dots x_N}^\Sigma(\cdot) \psi_\Sigma \rangle$$

ist, wobei x_k der letzte Blitz vom Typ $k \in \{1, \dots, N\}$ vor Σ ist.

– $G_{x_1 \dots x_N}^\Sigma$ ist ein POVM auf $(\text{Zuk}(\Sigma)^N)^\mathbb{N}$.

– Daher: Für das Anfangswertproblem auf Σ braucht man folgende Daten:

$$\psi_\Sigma, x_1, \dots, x_N$$

- “No signalling”: Botschaften können nicht schneller als Licht übertragen werden.

Nichtlokal & relativistisch

Nichtlokal: Blitze in A beeinflussen Blitze in B —*oder umgekehrt!*

Die Richtung des Einflusses hängt vom Koordinatensystem ab.
Wie kann das sein?

Beispiel [Conway & Kochen 2006]:

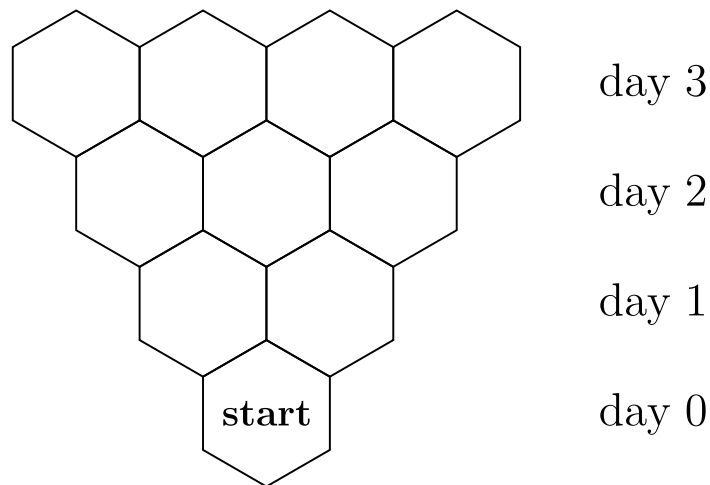
Diskrete 1 + 1-dim. Raumzeit $\subseteq \mathbb{Z}^2$,

$\phi : \text{Raumzeit} \rightarrow \{0, 1\}$ gehorcht 2 Gesetzen:

1. $\phi(x) + \phi(y) + \phi(z) \in \{0, 2\}$

wenn x, y, z Nachbarn mit $T(x) < T(y) = T(z)$

2. $\mathbb{P}(\phi(x) = 1 \mid \phi|_{T < T(x)}) = 1/2$.



Rigorese Resultate zu relativistischer GRW-Theorie

Satz. Gegeben:

- (M, g) Lorentz-4-Mannigfaltigkeit, zeit-orientiert
- $\tau(\cdot, x) = \text{Zeit-Abstand von } x \text{ ist in } C^\infty(\text{Zuk}(x)), \nabla_\mu \tau \neq 0.$
- Für alle $\Sigma, \Sigma' \in \{\text{Cauchy-Flächen}\} \cup \{\text{Hyperboloide}\}$:
 - \mathcal{H}_Σ Hilbert-Raum
 - $U_\Sigma^{\Sigma'} : \mathcal{H}_\Sigma \rightarrow \mathcal{H}_{\Sigma'}$ unitär
- Für Hyperboloide Σ : $\Lambda_\Sigma : \Sigma \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H}_\Sigma)$ schwach messbar,

$$\int_\Sigma d^3x \Lambda_\Sigma(x) = \lambda I;$$

$$\Lambda_\Sigma(x) \geq 0.$$

Dann existiert der relativistische GRWf-Prozess.

Satz. Für $(M, g) = \text{Minkowski-Raumzeit}$, $\mathcal{H}_\Sigma = L^2(\Sigma, \mathbb{C}^4, d^3x)$ mit Skalarprodukt

$$\langle \phi | \psi \rangle_\Sigma = \int_\Sigma d^3x \bar{\phi}(x) \gamma^\mu n_\mu(x) \psi(x),$$

und geeignete Klasse von A_μ definiert die Dirac-Gleichung $U_\Sigma^{\Sigma'}$. Mit $\Lambda_\Sigma(x) = \text{Multiplikation mit Gauß-Funktion}$ sind die obigen Voraussetzungen erfüllt, und der relativistische GRWf-Prozess existiert.

Lemma. $U : \mathcal{H}_{\text{Cauchy-Fläche}} \rightarrow \mathcal{H}_{\text{Hyperboloid}}$, definiert durch Dirac-Gleichung, ist unitärer Isomorphismus.